Lietuvos matematikos rinkinys. LMD darbai
52 tomas, 2011, 359–364

ISSN 0132-2818
www.mii.lt/LMR/

asimptotiniai skleidiniai

Algimantas Bikelis[1], Kazimieras Padvelskis[2], Pranas Vaitkus[3]

[1] *Vytauto Didžiojo Universitetas, Informatikos fakultetas*
Vileikos 8, LT-44404 Kaunas
[2] *Vilniaus Gedimino Technikos Universitetas, Fundamentinių mokslų fakultetas*
Saulėtekio 11, LT-10223 Vilnius
[3] *Vilniaus universitetas, Matematikos ir informatikos fakultetas*
Naugarduko 24, 03225 Vilnius
E. paštas: marius@post.omnitel.net; k.padvelskis@if.vdu.lt; vaitkuspranas@gmail.com

Santrauka. Tikimybinių skirstinių formalūs asimptotiniai skleidiniai yra pateikti P. L. Čebyševo 1890 m. [3] ir F. Edžvorto 1905 m. [5]. Tik 1928 metais G. Krameris paskelbė fundamentalų darbą [4] apie formalių asimptotinių skleidinių pagrįstumą. 1945 metais C.-G. Esseenas [6] parodė, kad gardeliniams atsitiktiniams dydžiams yra kiti asimptotiniai skleidiniai. Daugiamačių tikimybinių skirstinių asimptotinių skleidinių istoriją geriausiai apibendrina R. Bhattacharya ir R. Ranga Rao monografija [2]. Matematinėje statistikoje lygiagrečiai su Edžvorto skleidiniais yra naudojami Kornišo-Fišerio [7] asimptotiniai skleidiniai (transformacijos). Mes savo darbe konstruojame asimptotinius skleidinius atsižvelgdami į normuotos sumos patekimą į Borelio aibę arba tolstantį elipsoidą. Kvazigardeliniams atsitiktiniams vektoriams asimptotiniai skleidiniai yra sudėtingesni kaip C.-G. Esseeno skleidiniai.
Raktiniai žodžiai: Edžvorto skleidiniai, kvazigardeliniai atsitiktiniai dydžiai, Esseeno skleidiniai.

Įvadas

Tarkime $\vec{\xi}$ yra k-matis atsitiktinis vektorius su matematinių vilčių vektoriumi $E\vec{\xi} = \vec{0} \in R^k$ ir neišsigimusia antrųjų momentų matrica Σ. Jo tikimybinį skirstinį žymėsime $F(\vec{x}) = P\{\vec{\xi} < \vec{x}\}$, o charakteringąją funkciją $f(\vec{t}) = E\mathrm{e}^{i(\vec{t},\vec{\xi})}$. Čia $(\vec{t},\vec{x})$ – skaliarinė sandauga Euklido erdvėje R^k.

k-mačių Gauso tikimybinių skirstinių $\Phi(\vec{x}) = P\{\vec{\eta} < \vec{x}\}$ klasę žymėsime $N_k(\vec{0},\Sigma)$, t. y. $\Phi(\vec{x})$ matematinių vilčių vektorius yra $\vec{0} \in R^k$ ir antrųjų momentų matrica Σ.

Mus domina skirtumo

$$P^{*n}(A\sqrt{n}) - \Phi(A) \tag{1}$$

visoms Borelio aibėms $A \in \mathfrak{M}$ asimptotinis elgesys, kai $n \to \infty$. Čia

$$P^{*n}(A\sqrt{n}) = \int_A dF^{*n}\,(\vec{x}\sqrt{n})$$

ir

$$\Phi(A) = \int_A d\Phi(\vec{x}) = \int_A \varphi(\vec{x})\,d\vec{x}$$

$*$ pažymi tikimybinių skirstinių sąsūką.

Išskirsime du atvejus: pirmas, kai $F^{*n}(\vec{x}\sqrt{n})$ turi tankio funkciją $p_n(\vec{x})$, antras, kai $\vec{\xi}$ yra kvazigardelinis atsitiktinis vektorius.

Konstruodami formalius asimptotinius skleidinius laikysime, kad $\vec{\xi}$ turi visų eilių baigtinius momentus.

1 Absoliučiai tolydinis atvejis

Pasinaudodami Appel daugianariais mes gauname tokį tankio $p_n(\vec{y})$, $\vec{y} \in R^k$, formalų skleidinį:

$$\begin{aligned} p_n(\vec{y}) =&\varphi(\vec{y}) + \frac{1}{6\sqrt{n}} \int_{R^k} \frac{\partial^3}{\partial \varrho^3} \varphi(\vec{y} - \varrho\vec{x}) d(F - \Phi)(\vec{x}) \\ &+ \sum_{r=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^r \sum_{\nu-2\alpha+2m=r} \frac{(-\alpha)^m}{\alpha!\nu!m!} \\ &\times \int_{R^k} \frac{\partial^{m+\nu}}{\partial\varepsilon^m \partial\varrho^\nu} \left[\left(\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}}\right)^k \varphi\left(\frac{\vec{y} - \varrho\vec{x}}{\sqrt{1+\varepsilon}}\right)\right]_{\substack{\varepsilon=0\\ \varrho=0}} d(F-\Phi)^{*\alpha}(\vec{x}) \\ &+ \sum_{r=4}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^r \sum_{\nu-2\alpha+3m+2j=r} q_{jl} \frac{(-1)^{j+m}\alpha^m}{\nu!m!(\alpha-j-l-1)!} \\ &\times \int_{R^k} \frac{\partial^{m+\nu}}{\partial\varepsilon^m \partial\varrho^\nu} \left[\left(\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}}\right)^k \varphi\left(\frac{\vec{y} - \varrho\vec{x}}{\sqrt{1+\varepsilon}}\right)\right]_{\substack{\varepsilon=0\\ \varrho=0}} d(F-\Phi)^{*\alpha}(\vec{x}). \end{aligned} \tag{2}$$

Čia

$$\varphi(\vec{y}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^k \frac{1}{\sqrt{|\Sigma|}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\vec{y}^T \Sigma^{-1} \vec{y}\right\},$$

$|\Sigma|$ yra matricos Σ determinantas,

$$\sum_{\nu-2\alpha+2m=r} = \sum_{\substack{\alpha=1\\ \nu-2\alpha+2m=r}}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\nu=3\alpha}^{\infty},$$

$$\sum_{\nu-2\alpha+3m+2j=r} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{l=0}^{j-1} \sum_{\substack{\alpha=j+l+1\\ \nu-2\alpha+3m+2j=r}}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\nu=3\alpha}^{\infty},$$

$$q_{jl-1} = \Sigma^* \frac{1}{\nu_1!\dots\nu_j!} \left(\frac{1}{2}\right)^{\nu_1} \cdots \left(\frac{1}{j+1}\right)^{\nu_j},$$

$l = 1, 2, \dots, j$, Σ^* pažymi sunumeravimą pagal neneigiamus sveikus skaičius $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_j$ tenkinančius lygybes

$$\nu_1 + 2\nu_2 + \cdots + j\nu_j = j,$$
$$\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_j = k.$$

Iš lygybės (2) visoms $A \in \mathfrak{M}$ išplaukia skirtumo (1) formalus skleidinys:

$$\begin{aligned}
P^{*n}(A\sqrt{n}) - \Phi(A) ={}& \frac{1}{6\sqrt{n}} \int_{R^k} \left[\frac{\partial^3}{\partial \varrho^3} P\{\vec{\eta} + \varrho \vec{x} \in A\} \right]_{\varrho=0} d(F-\Phi)(\vec{x}) \\
&+ \sum_{r=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)^r \sum_{\nu - 2\alpha + 2m = r} \frac{(-\alpha)^m}{\alpha!\nu!m!} \\
&\times \int_{R^k} \left[\frac{\partial^{m+\nu}}{\partial \varepsilon^m \partial \varrho^\nu} P\bigl\{\sqrt{1+\varepsilon}\,\vec{\eta} + \varrho\vec{x} \in A\bigr\} \right]_{\substack{\varepsilon=0 \\ \varrho=0}} d(F-\Phi)^{*\alpha}(\vec{x}) \\
&+ \sum_{r=4}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)^r \sum_{\nu - 2\alpha + 2m + 2j = r} q_{jl} \frac{(-1)^{j+m}\alpha^m}{\nu!m!(\alpha - j - l - 1)!} \\
&\times \int_{R^k} \left[\frac{\partial^{m+\nu}}{\partial \varepsilon^m \partial \varrho^\nu} P\bigl\{\sqrt{1+\varepsilon}\,\vec{\eta} + \varrho\vec{x} \in A\bigr\} \right]_{\substack{\varepsilon=0 \\ \varrho=0}} d(F-\Phi)^{*\alpha}(\vec{x}).
\end{aligned} \tag{3}$$

Iš šios lygybės tinkamai parinkus aibę $A \subset R^k$ mes galime gauti eilę asimptotinių skleidinų. Pavyzdžiui, kai

$$A = \bigl\{\vec{y}\colon (\vec{y} - \vec{a})^T \Sigma^{-1} (\vec{y} - \vec{a}) < x\bigr\},$$

$\vec{a} \in R^k$, $x \geqslant 0$, tai

$$\int_A \varphi(\vec{y} - \varrho\vec{x})\, d\vec{y} = P\bigl\{\chi_k^2(\delta) < x\bigr\}.$$

Čia $\chi_k^2(\delta)$ yra necentrinis χ_k^2 atsitiktinis dydis su necentriškumo parametru

$$\delta = (\vec{a} - \varrho\vec{x})^T \Sigma^{-1} (\vec{a} - \varrho\vec{x}),$$

t. y.

$$P\bigl\{\chi_k^2(\delta) < x\bigr\} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(\frac{\delta}{2} \right)^j \mathrm{e}^{-\frac{\delta}{2}} P\bigl\{\chi_k^2(0) < x\bigr\}.$$

Čia $\chi_k^2(0)$ – centrinis χ_k^2 atsitiktinis dydis su k laisvės laipsnių.

Iš (3) seka, kad

$$\begin{aligned}
&\int_{(\vec{y}-\vec{a})^T \Sigma^{-1} (\vec{y}-\vec{a}) < x} p_n(\vec{y})\, d\vec{y} - P\bigl\{\chi_k^2\bigl(\vec{a}^T \Sigma^{-1} \vec{a}\bigr) < x\bigr\} \\
&\quad = \frac{1}{6\sqrt{n}} \int_{R^k} \left[\frac{\partial^3}{\partial \varrho^3} P\bigl\{\chi_k^2\bigl((\vec{a} - \varrho\vec{x})^T \Sigma^{-1} (\vec{a} - \varrho\vec{a})\bigr) < x\bigr\} \right]_{\varrho=0} d(F-\Phi)(\vec{x}) \\
&\qquad + \sum_{r=2}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)^r \sum_{\nu - 2\alpha + 2m = r} \frac{(-\alpha)^m}{\alpha!\nu!m!} \int_{R^k} \left[\frac{\partial^{m+\nu}}{\partial \varepsilon^m \partial \varrho^\nu} P\left\{ \chi_k^2 \left(\left(\frac{\vec{a} - \varrho\vec{x}}{\sqrt{1+\varepsilon}} \right)^T \right.\right.\right. \\
&\qquad \left.\left.\left. \times\, \Sigma^{-1} \left(\frac{\vec{a} - \varrho\vec{x}}{\sqrt{1+\varepsilon}} \right) \right) < x(1+\varepsilon) \right\} \right]_{\substack{\varepsilon=0 \\ \varrho=0}} d(F-\Phi)^{*\alpha}(\vec{x})
\end{aligned}$$

$$+\sum_{r=4}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^r \sum_{\nu-2\alpha+2m+2j=r} q_{jl}\frac{(-1)^{j+m}\alpha^m}{\nu!m!(\alpha-j-l-1)!}\int_{R^k}\left[\frac{\partial^{m+\nu}}{\partial\varepsilon^m\partial\varrho^\nu}\right.$$
$$\times P\left\{\chi_k^2\left(\left(\frac{\vec{a}-\varrho\vec{x}}{\sqrt{1+\varepsilon}}\right)^T\Sigma^{-1}\left(\frac{\vec{a}-\varrho\vec{x}}{\sqrt{1+\varepsilon}}\right)\right)<x(1+\varepsilon)\right\}\Bigg]_{\substack{\varepsilon=0\\ \varrho=0}} d(F-\Phi)^{*\alpha}(\vec{x}),$$

visiems $\vec{a}\in R^k$ ir $x\geqslant 0$).

2 Kvazigardelinių tikimybinių skirstinių atvejis

Nagrinėjame nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių kvazigardelinių atsitiktinių vektorių seką $\vec{\eta}_1,\vec{\eta}_2,\dots,\vec{\eta}_n$, t. y. $\vec{\eta}_1$ įgyja reikšmes $\vec{\beta}\vec{\nu}=(\beta_1\nu_1,\beta_2\nu_2,\dots,\beta_k\nu_k)$, $\vec{\nu}=(\nu_1,\dots,\nu_k)$, $\nu_i=0,\pm1,\dots$, $\vec{\beta}=(\beta_1,\dots,\beta_k)$, $\beta_i\geqslant 0$ ir $\beta_1,\dots,\beta_k$ yra tiesiškai nesurišti racionalių skaičių kūne. Charakteringoji funkcija $\vec{\eta}_1$ yra

$$f(\vec{t})=\sum_{\nu_1=-\infty}^{\infty}\cdots\sum_{\nu_k=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{i(\vec{t},\vec{\beta}\vec{\nu})}P\{\vec{\eta}_1=\vec{\beta}\vec{\nu}\}.$$

Pažymėkime $\vec{Z}_n=\vec{\eta}_1+\dots+\vec{\eta}_n$. Tuomet

$$P\{\vec{Z}_n=\vec{\beta}\vec{\nu}\}=\frac{\beta_1\dots\beta_k}{(2\pi)^k}\int_{-\pi/\beta_1}^{\pi/\beta_1}\cdots\int_{-\pi/\beta_k}^{\pi/\beta_k}\mathrm{e}^{-i(\vec{t},\vec{\beta}\vec{\nu})}f^n(\vec{t})\,d\vec{t}.$$

Atliekame kintamųjų pakeitimą $\vec{t}=\frac{\vec{u}}{\sqrt{n}}$ ir gauname

$$\frac{(\sqrt{n})^k}{\beta_1\dots\beta_k}P\{\vec{Z}_n=\vec{\beta}\vec{\nu}\}=\frac{1}{(2\pi)^k}\int_{I_n}\mathrm{e}^{-i(\vec{u},\frac{\vec{\beta}\vec{\nu}}{\sqrt{n}})}f^n\left(\frac{\vec{u}}{\sqrt{n}}\right)d\vec{u}. \tag{3}$$

Čia $I_n=\{\vec{t}\colon |t_j|\leqslant\frac{\sqrt{n}\pi}{\beta_i},\ j=1,\dots,k\}$.

Kadangi

$$f^n\left(\frac{\vec{t}}{\sqrt{n}}\right)=Q\left(\frac{\vec{t}}{\sqrt{n}}\right),$$

čia

$$Q\left(\frac{\vec{t}}{\sqrt{n}}\right)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\vec{t}^T\Sigma\vec{t}}\left\{1+\sum_{\alpha=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{\nu=3\alpha}^{\infty}\frac{(-\alpha)^m}{\alpha!\nu!m!}\right.$$
$$\times\int_{R^k}\left(-\frac{1}{2}\vec{t}^T\Sigma\vec{t}\right)^m\big(i(\vec{t},\vec{x})\big)^\nu d(F-\Phi)^{*\alpha}(\vec{x})$$
$$+\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{l=0}^{j-1}\sum_{\alpha=j+l+1}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{\nu=3\alpha}^{\infty}q_{jl}\frac{(-1)^{j+m}\alpha^m}{\nu!m!(\alpha-j-l-1)!}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\nu-2\alpha+2m+2j}$$
$$\left.\times\int_{R^k}\left(-\frac{1}{2}\vec{t}^T\Sigma\vec{t}\right)^m\big(i(\vec{t},\vec{x})\big)^\nu d(F-\Phi)^{*\alpha}(\vec{x})\right\},$$

tai iš (4) lygybės seka, kad

$$\frac{(\sqrt{n})^k}{\beta_1\dots\beta_k}P\{\vec{Z}_n=\vec{\beta}\vec{\nu}\}=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^k\int_{R^k}\mathrm{e}^{-i(\vec{t},\frac{\vec{\beta}\vec{\nu}}{\sqrt{n}})}Q\left(\frac{\vec{t}}{\sqrt{n}}\right)d\vec{t}+R(\vec{\beta}\vec{\nu}).$$

Čia

$$R(\vec{\beta}\vec{\nu})=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^k\int_{R^k\setminus I_n}\mathrm{e}^{-i(\vec{t},\frac{\vec{\beta}\vec{\nu}}{\sqrt{n}})}Q\left(\frac{\vec{t}}{\sqrt{n}}\right)d\vec{t}.$$

Gauname, kad

$$\begin{aligned}
&\frac{(\sqrt{n})^k}{\beta_1\dots\beta_k}P\{\vec{Z}_n\\
&\quad=\vec{\beta}\vec{\nu}\}=\varphi\left(\frac{\vec{\beta}\vec{\nu}}{\sqrt{n}}\right)+\frac{1}{6\sqrt{n}}\int_{R^k}\left[\frac{\partial^3}{\partial\varrho^3}\varphi\left(\frac{\vec{\beta}\vec{\nu}}{\sqrt{n}}-\varrho\vec{x}\right)\right]_{\varrho=0}d(F-\varPhi)(\vec{x})\\
&\qquad+\sum_{r=2}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^r\sum_{\nu-2\alpha+2m=r}\frac{(-\alpha)^m}{\alpha!\nu!m!}\\
&\qquad\times\int_{R^k}\frac{\partial^{m+\nu}}{\partial\varepsilon^m\partial\varrho^\nu}\left[\left(\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}}\right)^k\varphi\left(\frac{\vec{\beta}\vec{\nu}}{\sqrt{n(1+\varepsilon)}}-\frac{\varrho}{\sqrt{1+\varepsilon}}\vec{x}\right)\right]_{\substack{\varepsilon=0\\ \varrho=0}}d(F-\varPhi)^{*\alpha}(\vec{x})\\
&\qquad+\sum_{r=4}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^r\sum_{\nu-2\alpha+2m+2j=r}q_{jl}\frac{(-1)^{j+m}\alpha^m}{\nu!m!(\alpha-j-l-1)!}\\
&\qquad\times\int_{R^k}\frac{\partial^{m+\nu}}{\partial\varepsilon^m\partial\varrho^\nu}\left[\left(\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}}\right)^k\varphi\left(\frac{\vec{\beta}\vec{\nu}}{\sqrt{n(1+\varepsilon)}}-\frac{\varrho}{\sqrt{1+\varepsilon}}\vec{x}\right)\right]_{\substack{\varepsilon=0\\ \varrho=0}}d(F-\varPhi)^{*\alpha}(\vec{x})+R.
\end{aligned}\tag{4}$$

Iš šios formalios lygybės seka asimptotinė formulė nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių kvazigardelinių atsitiktinių dydžių $\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n$ sumos $S_n=\xi_1,+\dots=\xi_n$ tikimybei

$$P\bigl\{S_n=(\vec{\beta},\vec{\nu})\bigr\}.$$

Čia ξ_1 įgyja reikšmes $(\vec{\beta},\vec{\nu})=\beta_1\nu_1+\beta_2\nu_2+\dots+\beta_k\nu_k$. Pasinaudojame lygybe

$$P\bigl\{S_n=(\vec{\beta},\vec{\nu})\bigr\}=P\{\vec{Z}_n=\vec{\beta}\vec{\nu}\}.$$

Ši lygybė seka iš $\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_k$ tiesiško nesurištumo racionalių skaičių kūne, t. y.

$$\beta_1\nu_1+\beta_2\nu_2+\dots+\beta_k\nu_k=0$$

tada ir tik tada, kai $\nu_1=\nu_2=\dots=\nu_k=0$.

Iš (5) lygybės, panaudojus Eulerio-Makloreno sumavimo formulę, gauname tikimybės

$$P\left\{\frac{S_n}{\sqrt{n}}\in A\right\}$$

asimptotinį sklaidinį.

Gautų formalių asimptotinių skleidinių pagrįstumas gaunamas klasikiniai metodais (žiūr. [1]). Formulėje (3) imame narius iki $r=s$.

Literatūra

[1] O.E. Barndorfr-Nielsen and D.R. Cox. *Asyptotic Techniques for Use in Statistics*. Chanpman and Hall, 1989.

[2] R.N. Bhattacharya and R. Ranga Rao. *Normal Approximation and Asymptotic Expansions*. SIAM, 2010.

[3] P.L. Chebyshev. Sur deux théorémes relatifs aux probabilitiés. *Acta Math.*, **14**:305–315, 1890.

[4] H. Cramér. On the composition of elementary errors. *Skand. Aktuarietidskr.*, **11**:13–74, 1928.

[5] F.Y. Edgeworth. The law of error. *Proc. Camb. Philos. Soc.*, **20**:336–65, 1905.

[6] C.-G. Esesen. Fourier analysis of distribution functions. A mathematical study of the Laplace–Gaussian law. *Acta Math.*, **77**:1–125, 1945.

[7] E.D. Melune and H.L. Gray. Cornish–fisher and edeworth expansions. *Encyclopedia of Statist. Scien.*, **II**:188–193, 1983.

SUMMARY

Asymptotic expansions for distribution of sums quasi-lattice random variables

A. Bikelis, K. Padvelskis, P. Vaitkus

Althoug Chebyshev [3] and Edeworth [5] had conceived of the formal expansions for distribution of sums of independent random variables, but only in Cramer's work [4] was laid a proper foundation of this problem. In the case when random variables are lattice Esseen get the asymptotic expansion in a new different form. Here we extend this problem for quasi-lattice random variables.

Keywords: Edgeworth expansions, quasi-lattice distributions, Esseen expansions.